## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**Лекция 1**

### Основные понятия

*Опр.1. Уравнение, связывающее между собой независимую переменную , неизвестную функцию  и производные или дифференциалы этой функции, называют* ***дифференциальным уравнением****.*

***Порядком*** дифференциального уравнения называют порядок старшей производной или дифференциала в уравнении. Например,  – дифференциальное уравнение 2-го порядка;  – дифференциальное уравнение 1-го порядка.

*Опр.2.* ***Решением*** *дифференциального уравнения называется функция , которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.*

Покажем, что функция  является решением дифференциального уравнения . Для этого найдем производную : , . Подставляем в исходное уравнение, получаем тождество: .

Рассмотрим на примере, как можно найти решение дифференциального уравнения.

*Пример 1.* Дано уравнение . Так как , то, заменив в исходном уравнении левую часть, получим уравнение . Умножим обе части полученного равенства на . Получим: . Интегрируем правую и левую части данного равенства:

,



Так как , то . Снова умножаем обе части полученного равенства на . Получаем: .

Интегрируем: ,



Если в равенстве  константам  и  придать конкретные числовые значения, то получим функцию, которая является решением дифференциального уравнения . Например, .

Из данного примера следует, что дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений. Всё множество решений дифференциального уравнения -го порядка можно записать в виде  или , где  Это равенство называют ***общим решением*** дифференциального уравнения.

Придавая константам определенные числовые значения, можно из общего решения получить ***частное решение*** дифференциального уравнения. График частного решения называют ***интегральной кривой***.

Иногда требуется найти частное решение, удовлетворяющее ***начальным условиям***: , , …, , т.е. решить ***задачу Коши***.

Задача Коши, поставленная для дифференциального уравнения 1-го порядка, содержит одно начальное условие , указывающее координаты точки, через которую проходит интегральная кривая искомого частного решения. В случае дифференциального уравнения 2-го порядка добавляется условие , указывающее направление интегральной кривой (её угловой коэффициент) в точке с абсциссой  и так далее.

*Пример 2*. Найти частное решение дифференциального уравнения , удовлетворяющее начальным условиям , .

*Решение*. Общее решение уравнения  имеет вид . Подставляем в него первое начальное условие: ,.

Продифференцировав общее решение, получаем: .

В это равенство подставляем второе начальное условие: , .

Искомое частное решение будет иметь вид: .

### Дифференциальные уравнения первого порядка

**п. 2.1. Основные понятия**

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде . Если уравнение можно разрешить относительно , то его записывают в виде . Данное уравнение устанавливает связь между координатами точки (х; у) и угловым коэффициентом у’ касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ дает совокупность направлений (*поле направлений)* на плоскости *Оху*. Таков геометрический смысл ДУ первого порядка.

ДУ первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме:*

***Общим решение*** ДУ первого порядка называется функция . Если придать произвольной постоянной С конкретное значение *С=С0*, то получим ***частное решение*** ДУ.

Общее (частное) решение ДУ первого порядка может быть получено в неявном виде: .

Геометрически общее решение ДУ первого порядка задает в координатной плоскости *Оху семейство интегральных кривых,* а частное решение – это интегральная кривая, проходящая через указанную точку координатной плоскости.

Задача нахождения частного решения ДУ по заданному начальному условию, называется ***задачей Коши***. Для ДУ первого порядка имеет место теорема.

***Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).*** *Если в уравнении . функция и ее частная производная непрерывны в некоторой области D, содержащей точку , то существует единственное решение уравнения , удовлетворяющего условию*

Рассмотрим методы решения ДУ первого порядка.

**п. 2.2. Уравнения с разделяющимися переменными**

*Опр. Дифференциальное уравнение вида* *называют*  ***дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными****, если функции**можно представить в виде следующих произведений , .*

Тогда уравнение с разделяющимися переменными имеет вид



Процесс решения уравнений данного типа состоит в следующем:

 (1)







.

Получаем общее решение: .

***Замечания.***

1)Если уравнение можно разрешить относительно , т.е. записать в виде и правую часть уравнения можно представить в виде произведения, т.е. , то это уравнение так же является уравнением с разделяющимися переменными. Рассмотрим его решение в общем виде.

.

2) При делении уравнения (1) на произведение функций могут быть потеряны решения. Это решения уравнения =0. Поэтому следует отдельно решить уравнение =0 и установить те решения, которые не могут быть получены из общего решения, такие решения называют ***особыми решениями.***

*Пример 3*. Решить уравнение: .

*Решение*. Разделяем переменные:

.

Интегрируем:

,

.

Упрощаем полученное общее решение:



, где .

В полученное решение не входит у-0, которое может быть потеряно. Подставив у=0 в исходное уравнение убеждаемся, что это особое решение.

Ответ: , у=0.

*Пример 4*. Решить уравнение: .

*Решение*.

.

Особых решений здесь нет.

Ответ:

Литература:

1. Д. Письменный «Конспект лекций по высшей математике», глава 1, параграфы 1, 2 (п.2.1,,2.2)
2. Н.Ш. Кремер «Высшая математика для экономистов», глава 12 п. 12.1, 12.2, 12.4

***Однородным уравнением первого порядка*** называется уравнение вида , если выполняется условие . Записывают:



Решают уравнения данного типа сведением к уравнению с разделяющимися переменными заменой .

*Пример 5*. Решить уравнение:

.

*Решение*. В данном уравнении переменные разделить нельзя. Проверим его однородность:



.

Получили исходное уравнение.

Вводим замену: , .

Получаем уравнение, где искомой функцией является :





Разделяем переменные:





Интегрируем:

.

Упрощаем найденное решение:

.

Так как из равенства  следует, что , получаем:

, или .